PART2 無理関数

要点整理と公式

要点① 無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

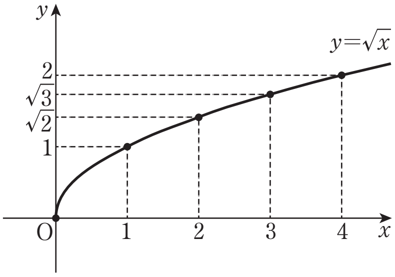
「無理式」･･･ $\sqrt{x}$，$\sqrt{x^2+2}$ のように，根号の中に文字を含む式。

x の無理式で表される関数を x の「無理関数」という。

定義域は，根号の中が 0 以上になる実数全体。

無理関数 $y=\sqrt{x}$ ……① の定義域は

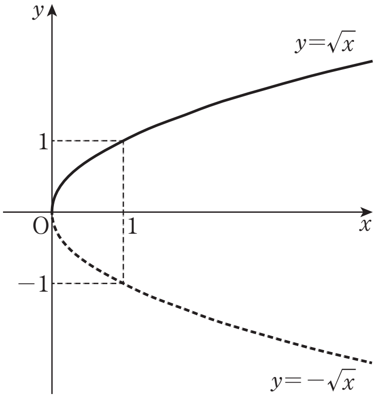
x	0	1	2	3	4	……
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	……



①のグラフは右図。値域は

①の両辺を 2 乗すると $y^2=x$ ……②

これは原点を頂点とし，x 軸を軸とする放物線を表す。①のグラフは，放物線②の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分および原点である。

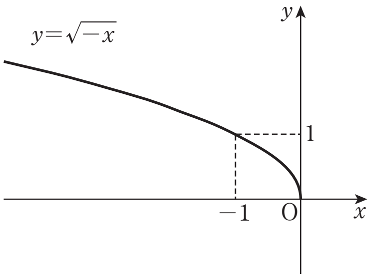


無理関数 $y=-\sqrt{x}$ ……③ のグラフは，①のグラフと x 軸に関して対称なグラフであるから，放物線②の $y \leqq 0$，すなわち x 軸より下側の部分および原点である。

③の定義域は $x \geqq 0$，値域は 　　　である。

無理関数 $y=\sqrt{-x}$ ……④ の定義域は 　　　，値域は 　　　である。

④のグラフは，①のグラフと y 軸に関して対称なグラフである。

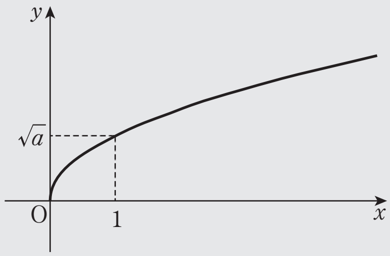


④の両辺を2乗すると $y^2=-x$ ……⑤ であり，④のグラフは，放物線⑤の $y \geqq 0$ の部分，すなわち x 軸より上側の部分および原点である。

無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

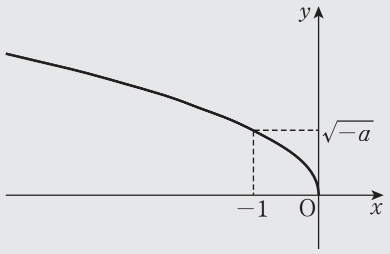
頂点を原点，軸を x 軸とする放物線 $y^2=ax$ の $y\geqq 0$ の部分

$a>0$ のとき



定義域：$x\geqq 0$　　値域：$y\geqq 0$

$a<0$ のとき



定義域：$x\leqq 0$　　値域：$y\geqq 0$

要点 ② 無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

(ex) 無理関数 $y=\sqrt{2x-4}$ のグラフ

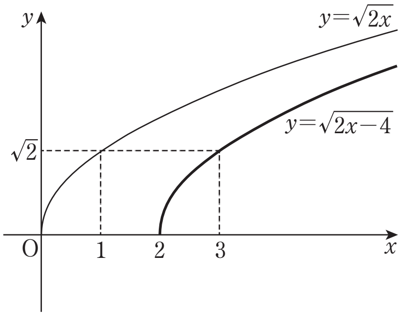
$y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x\quad\quad)}$

よってこの関数のグラフは，$y=$　　　のグラフを

x 軸方向に　だけ平行移動

したものである。したがって，グラフは右図。

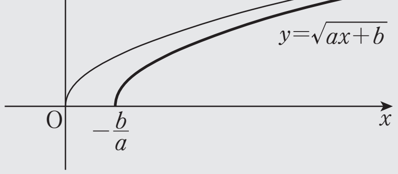
定義域は　　　，値域は $y\geqq 0$ である。



無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

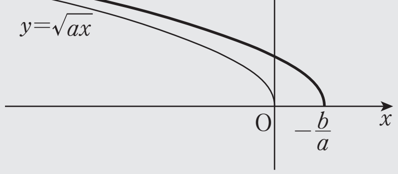
$y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ より，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動した曲線

$a>0$ のとき



定義域：$x\geqq -\dfrac{b}{a}$　　値域：$y\geqq 0$

$a<0$ のとき



定義域：$x\leqq -\dfrac{b}{a}$　　値域：$y\geqq 0$

2 (1) 次の関数のグラフをかけ。

(i) $y=\sqrt{2x}$ (ii) $y=-\sqrt{2x}$

(iii) $y=\sqrt{-2x}$ (iv) $y=-\sqrt{-2x}$

(2)(i) 関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

(ii) 不等式 $\sqrt{2x+3}>x$ を解け。

Point Pickup

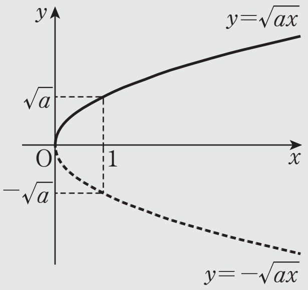
無理関数 $y=\pm\sqrt{ax}$ のグラフ

頂点を原点，軸を x 軸とする放物線 $y^2=ax$ の

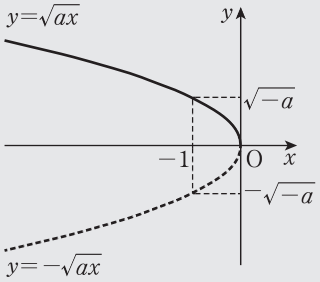
$y=\sqrt{ax}$ …… $y\geqq 0$ の部分

$y=-\sqrt{ax}$ …… $y\leqq 0$ の部分

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



分数関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

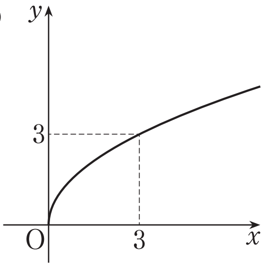
$y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形し，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したグラフを描く。

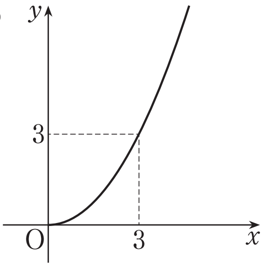
第 1 講　PART2 確認問題

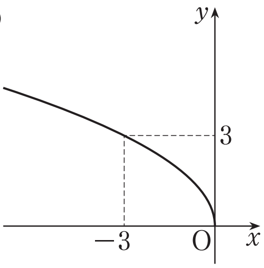
1　次の関数のグラフを，下の①～⑥のうちから選べ。

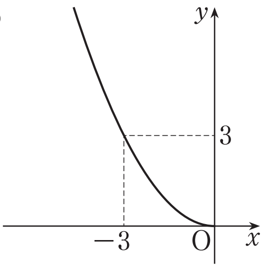
$y=\sqrt{3x}$　[ア]　　$y=-\sqrt{3x}$　[イ]

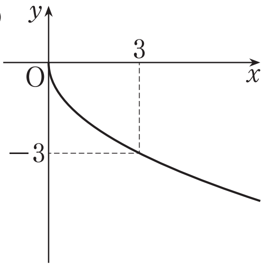
$y=\sqrt{-3x}$　[ウ]　　$y=-\sqrt{-3x}$　[エ]

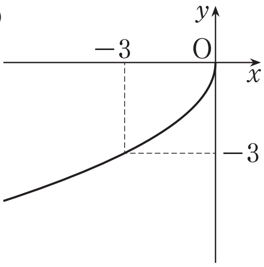
①


②


③


④


⑤


⑥


2　関数 $y=\sqrt{x+4}$ のグラフと直線 $y=x-2$ の共有点の座標は，([オ], [カ]) である。

3　不等式 $\sqrt{x+4}>x-2$ の解は，[キク] $\leqq x<$ [ケ] である。

PART2 無理関数

2 (1) 次の関数のグラフをかけ。

(i) $y=\sqrt{2x}$　　(ii) $y=-\sqrt{2x}$

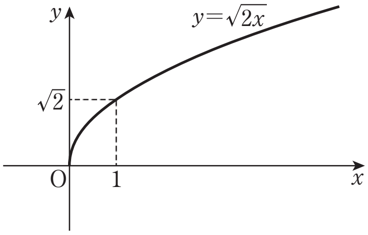
(iii) $y=\sqrt{-2x}$　　(iv) $y=-\sqrt{-2x}$

(2)(i) 関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

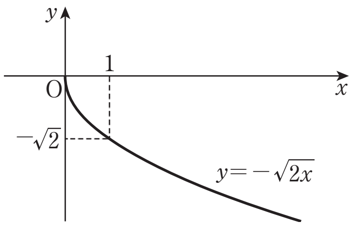
(ii) 不等式 $\sqrt{2x+3}>x$ を解け。

[解答]

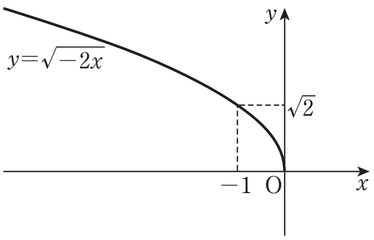
(1)(i)



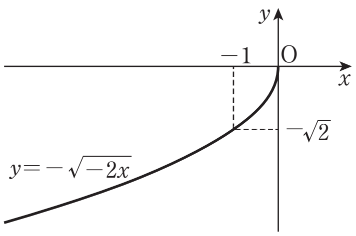
(ii)



(iii)



(iv)



(2)(i) 関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の x 座標は，

方程式 $\sqrt{2x+3}=x$ ……①の解である。

①の両辺を 2 乗すると

$$2x+3=x^2$$

$$x^2-2x-3=0$$　　よって $x=-1,\ 3$

$x=-1$ のとき ①において (左辺)$=1$，(右辺)$=-1$ より不適

$x=3$ のとき　①の両辺の値は 3

したがって，求める共有点の座標は $(3,\ 3)$

(ii)　不等式 $\sqrt{2x+3}>x$　……②の解は，

関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフが直線

$y=x$ より上側にある x の値の範囲

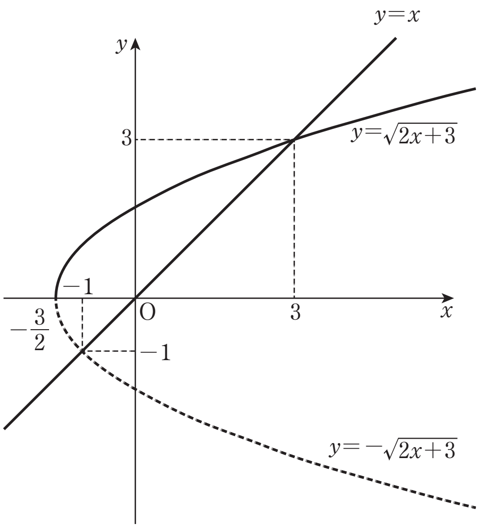
である。

$y=\sqrt{2x+3}=\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}$ のグラフ

および $y=x$ のグラフは，(i)より右図。

この図より，不等式②の解は

$$-\frac{3}{2}\leqq x<3$$



第 1 講　PART2 確認問題 解答

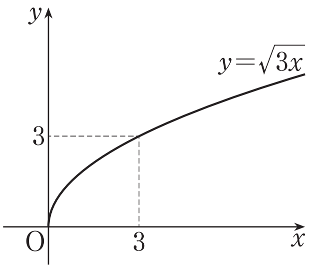
1　**[正解]** ア：①，イ：⑤，ウ：③，エ：⑥

[解説]

$y=\sqrt{3x}$ の定義域は，$x \geqq 0$

値域は，　$y \geqq 0$

[A]

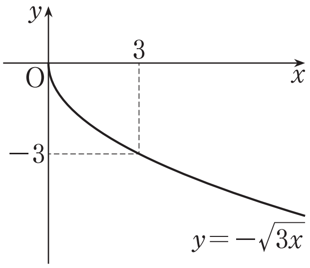


［A］　$y=\sqrt{3x}$ のグラフは，放物線 $y^2=3x$ の $y \geqq 0$ の部分。

$y=-\sqrt{3x}$ の定義域は，$x \geqq 0$

値域は，　$y \leqq 0$

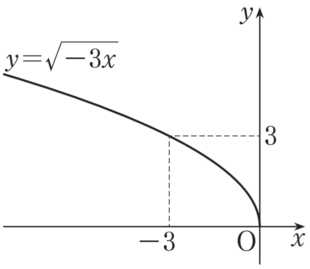
[B]



［B］　$y=-\sqrt{3x}$ のグラフは，放物線 $y^2=3x$ の $y \leqq 0$ の部分。

$y=\sqrt{-3x}$ の定義域は，$x \leqq 0$ [C]

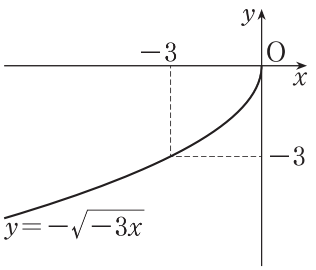
値域は，　$y \geqq 0$



［C］　$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上であるから，
$-3x \geqq 0$
よって，$x \leqq 0$ である。

$y=-\sqrt{-3x}$ の定義域は，$x \leqq 0$

値域は，　$y \leqq 0$



[D]

[D]　$y=-\sqrt{-3x}$ のグラフは，$y=\sqrt{-3x}$ のグラフと x 軸に関して対称である。

2

[正解] オ：5，カ：3

[解説]

$y=\sqrt{x+4}$ のグラフと直線 $y=x-2$ の共有点の x 座標は，

$\sqrt{x+4}=x-2$　……①　[E]

の解である。

[E]　2 つの式から y を消去して，x の方程式をつくって解く。

両辺を 2 乗すると，

$x+4=(x-2)^2$

$x+4=x^2-4x+4$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$x=0,\ 5$

$x=0$ のとき，①において，[F]

(左辺)＝2，(右辺)＝−2 より不適。

[F]　求めた x の値が①を満たすかどうかを確認する。

$x=5$ のとき，①の両辺の値は 3

よって，共有点の座標は，(5，3)

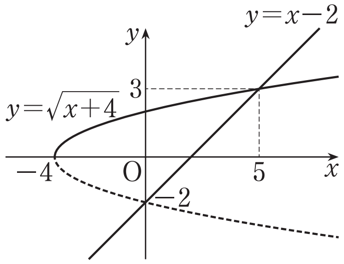
3 **[正解]** キク：-4，ケ：5

[解説]

不等式 $\sqrt{x+4} > x-2$ の解は，$y=\sqrt{x+4}$ のグラフが直線 $y=x-2$ より上側にある x の値の範囲である。[G]

[G]　2つのグラフの上下関係を利用して解く。

$y=\sqrt{x+4}$ のグラフおよび $y=x-2$ のグラフは，次の図のようになる。



よって，グラフより，[H]

$\sqrt{x+4} > x-2$

$\boldsymbol{-4 \leqq x < 5}$

[H]　$y=\sqrt{x+4}$ の定義域が $x \geqq -4$ であることに注意する。